UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Física Aplicada

RELACIÓN 5: MOVIMIENTO Y DEFORMACIÓN

PROBLEMA 5.1. Comprobar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
a) Si un campo de velocidades es estacionario, el campo de aceleraciones también lo es.
b) Si un campo de velocidades es uniforme, el campo de aceleraciones es siempre nulo,

Solución: a) cierto, b) falso.

PROBLEMA 5.2. Para el campo de velocidades $v_x = 0$, $v_y = 0$, $v_z = f(x,y)z$, obtenga:
a) Las trayectorias y las líneas de corriente.
b) La ecuación de la mancha en función del tiempo que se produciría si en el instante t=1 se vierte un colorante en los puntos de una superficie esférica de radio R, con centro en (0,0,0).

Solución: a) Las trayectorias y las líneas de corriente coinciden: $x=C_1$, $y=C_2$, $z = C_3 e^{f(C_1,C_2)t}$

b) $x^2 + y^2 + z^2 e^{[(1-t)2f(x,y)]} - R^2 = 0.$

PROBLEMA 5.3. La descripción del movimiento de un medio continuo viene dada por

$$\begin{aligned} x^1 &= \xi^1 e^t + \xi^3 (e^t - 1), \\ x^2 &= \xi^3 (e^t - e^{-t}) + \xi^2, \\ x^3 &= \xi^3. \end{aligned}$$

Probar que el Jacobiano de la transformación no se anula y obtenga las coordenadas Lagrangianas en función de las Eulerianas.

Solución: $\xi^1 = e^{-t} x^1 - x^3 (1 - e^{-t}),\ \xi^2 = x^2 - x^3 (e^t - e^{-t}),\ \xi^3 = x^3.$

PROBLEMA 5.4. El movimiento de un medio continuo viene dado por:

$$\begin{aligned} x^1 &= A + \frac{e^{-B\lambda}}{\lambda} \sin \lambda (A + \omega t), \\ x^2 &= -B - \frac{e^{-B\lambda}}{\lambda} \cos \lambda (A + \omega t), \\ x^3 &= C. \end{aligned}$$

a) Pruebe que las trayectorias de las partículas son circunferencias con velocidad de módulo constante. b) Determine además la relación entre las coordenadas Lagrangianas, ξ^i, y las constantes A y B.

Solución: a) Es una circunferencia, pues se cumple: $(x^1 - A)^2 + (x^2 + B)^2 = \dfrac{e^{-2B\lambda}}{\lambda^2},\ x^3 = C.$

b) $\xi^1 = A + \dfrac{e^{-B\lambda}}{\lambda} sen \lambda A$, $\xi^2 = -B - \dfrac{e^{-B\lambda}}{\lambda} \cos \lambda A,\ \xi^3 = C.$

PROBLEMA 5.5. El movimiento de un medio continuo viene dado por:

$$\begin{aligned} x^1 &= \xi^1. \\ x^2 &= \frac{e^t}{2}(\xi^2+\xi^3)+\frac{e^{-t}}{2}(\xi^2-\xi^3), \\ x^3 &= \frac{e^t}{2}(\xi^2+\xi^3)-\frac{e^{-t}}{2}(\xi^2-\xi^3). \end{aligned}$$

Hallar las componentes de la velocidad de deformación en las formas Lagrangiana y Euleriana.

Solución: Lagrangiana:

$$\left.\begin{aligned} v^1 &= 0 \\ v^2 &= \frac{e^t(\xi^2+\xi^3)}{2}-\frac{e^{-t}(\xi^2-\xi^3)}{2} \\ v^3 &= \frac{e^t(\xi^2+\xi^3)}{2}+\frac{e^{-t}(\xi^2-\xi^3)}{2} \end{aligned}\right\}$$

Euleriana:

$$\left.\begin{aligned} v^1 &= 0 \\ v^2 &= x^3 \\ v^3 &= x^2 \end{aligned}\right\}$$

PROBLEMA 5.6. La velocidad de deformación de un medio continuo en representación Euleriana viene dada por: $v^1 = 0$, $v^2 = x^3$ y $v^3 = x^2$. Obtenga a partir de ésta, las coordenadas Eulerianas en términos de las Lagrangianas.

Solución: se obtienen las expresiones $x^i = x^i(\xi^j)$ del problema anterior.

PROBLEMA 5.7. Respecto de un sistema Cartesiano de ejes Eulerianos, x^i, y Lagrangianos, ξ^i, la deformación de un medio continuo bidimensional en el tiempo t viene dada por

$$\begin{aligned} x^1 &= \xi^1-\xi^2, \\ x^2 &= 2\xi^2. \end{aligned}$$

Hallar los vectores base en el tiempo t.

Solución: $\overset{\circ}{\vec{u}}_1 = \hat{i},\ \overset{\circ}{\vec{u}}_2 = \hat{j},\ \vec{u}_1 = \hat{i},\ \vec{u}_2 = -\hat{i}+2\hat{j}.$

PROBLEMA 5.8. La deformación de un medio continuo viene dada por

$$\begin{aligned} x^1 &= \xi^1, \\ x^2 &= \xi^2 + A\xi^3, \\ x^3 &= \xi^3 + A\xi^2. \end{aligned}$$

a) Hallar las componentes del vector desplazamiento en su formulación Lagrangiana y Euleriana.
b) Determine cómo se transforma en t la curva de partículas materiales que inicialmente viene dada por $\xi^1=0$, $(\xi^2)^2+(\xi^3)^2=1/(1-A^2)$.

c) Determine cómo se transforma la recta inicial de partículas materiales dada por ξ^1=0, ξ^2=ξ^3.
d) Determine la transformación de un cubo de aristas $d\xi^i$=$d\xi$, coincidentes con los ejes coordenados.

Solución: a) $\vec{d} = A\xi^3\hat{j} + A\xi^2\hat{k}$ y $\vec{d} = A(1-A^2)^{-1}\left\{\left(x^3 - Ax^2\right)\hat{j} + \left(x^2 - Ax^3\right)\hat{k}\right\}$.

b) En la elipse $x^1 = 0, (1+A^2)(x^2)^2 - 4Ax^2x^3 + (1+A^2)(x^3)^2 = 1 - A^2$.

c) En la recta $x^1 = 0,\ x^2 = x^3$.

d) Los lados se trasforman en los vectores $(d\xi, 0, 0)$, $(0, d\xi, Ad\xi)$, $(0, Ad\xi, d\xi)$ y la diagonal $(d\xi, d\xi, d\xi)$ en $(d\xi, d\xi + A, d\xi + Ad\xi)$.

PROBLEMA 5.9. Determine el tensor deformación Lagrangiano y Euleriano del problema anterior, así como el coeficiente de dilatación cúbica.

Solución:

$$\left(\varepsilon_{ij}\right)_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{A^2}{2} & A \\ 0 & A & \dfrac{A^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \left(\varepsilon_{ij}\right)_E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \dfrac{1+A^2}{(1-A^2)^2} & \dfrac{2A}{(1-A^2)^2} \\ 0 & \dfrac{2A}{(1-A^2)^2} & 1 - \dfrac{1+A^2}{(1-A^2)^2} \end{pmatrix}, \ \theta = \text{-}A^2.$$

PROBLEMA 5.10. Considere, para el campo de desplazamientos del problema 8, un rectángulo OACB en *t*=0, contenido en el plano ξ^1=0, siendo O el origen en el sistema de coordenadas Lagrangiano, OC una diagonal, y sus lados OA y OB, coincidentes con los ejes ξ^2 y ξ^3 y de longitud dξ^2 y dξ^3 respectivamente. Determine las longitudes de OA, OB y OC en *t*.

Solución: $\sqrt{1+A^2}\,d\xi^2$, $\sqrt{1+A^2}\,d\xi^3$ y $\sqrt{(1+A^2)\left((d\xi^2)^2 + (d\xi^2)^2\right)^2 + 4Ad\xi^2 d\xi^3}$, respectivamente.

PROBLEMA 5.11. La formulación general de la deformación homogénea trata las deformaciones de los medios continuos en los que los desplazamientos son $d^i = A^i_j\xi^j$, donde A^i_j son constantes o, a lo sumo, funciones del tiempo. Probar que esta deformación es tal que:

a) Las secciones planas permanecen planas.
b) Las líneas rectas permanecen rectas.

PROBLEMA 5.12. Para el campo de desplazamientos del problema anterior, determine el coeficiente de dilatación cúbica. Particularice el resultado para el caso de deformaciones pequeñas.

Solución: $\theta = \varepsilon_{ijk}\left(A^i_1 + \delta^i_1\right)\left(A^j_2 + \delta^j_2\right)\left(A^k_3 + \delta^k_3\right) - 1$. Para pequeñas deformaciones, $\theta \simeq A^i_i$.

PROBLEMA 5.13. El tensor de deformación de un medio continuo sometido a deformaciones infinitesimales viene dado por

$$\begin{pmatrix} (x^1)^2 & (x^2)^2 & x^2x^3 \\ (x^2)^2 & x^3 & (x^3)^2 \\ x^2x^3 & (x^3)^2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Compruebe que se satisfacen las ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant.

PROBLEMA 5.14. Determine los ejes principales del tensor de deformación del problema 8 para el caso $A=\sqrt{2}$.

Solución: $(1,0,0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.

PROBLEMA 5.15. Respecto de un sistema de ejes Eulerianos, x^i, y Lagrangianos, ξ^i, la deformación de un medio continuo en el tiempo *t* viene dada por

$$\begin{aligned} x^1 &= \xi^1 + A\xi^2, \\ x^2 &= \xi^2 + A\xi^3, \\ x^3 &= \xi^3 + A\xi^1. \end{aligned}$$

Calcule los tensores de deformación Lagrangiano y Euleriano.

Solución:

$$\left(\varepsilon_{ij}\right)_L = \begin{cases} \varepsilon_{ij} = \dfrac{A^2}{2} \text{ si } i=j \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{A}{2} \text{ si } i \neq j \end{cases}, \quad \left(\varepsilon_{ij}\right)_E = \begin{cases} \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1+A^2+A^4}{(1+A^3)^2}\right) \text{ si } i=j \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A-A^2+A^3}{(1+A^3)^2}\right) \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

PROBLEMA 5.16. Demuestre que los invariantes del tensor de deformación en *t* y en el instante inicial cumplen las siguientes relaciones:

$$I_1 = \frac{\overset{\circ}{I}_1 + 4\overset{\circ}{I}_2 + 12\overset{\circ}{I}_3}{1+2\overset{\circ}{I}_1+4\overset{\circ}{I}_2+8\overset{\circ}{I}_3}, \; I_2 = \frac{\overset{\circ}{I}_2 + 6\overset{\circ}{I}_3}{1+2\overset{\circ}{I}_1+4\overset{\circ}{I}_2+8\overset{\circ}{I}_3}, \; I_3 = \frac{\overset{\circ}{I}_3}{1+2\overset{\circ}{I}_1+4\overset{\circ}{I}_2+8\overset{\circ}{I}_3}.$$

PROBLEMA 5.17. Respecto de un sistema de ejes Eulerianos, x^i, la deformación de un medio continuo en el tiempo *t* viene dada por

$$d^1 = Ax^1 + 3x^2,$$
$$d^2 = 3x^1 - Bx^2,$$
$$d^3 = 5.$$

Pruebe que la deformación es plana y determine la relación que debe haber entre A y B para que la deformación sea isocora en cualquier punto del espacio.

Solución: Es plana puesto que en el tercer eje tan solo se produce una traslación. Es isocora cuando se cumple (1-A)(1+B)=10.

PROBLEMA 5.18. En un punto de un medio deformable, el tensor de deformación Lagrangiano es

$$\left(\varepsilon_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} 10^{-4}.$$

a) Calcule el cambio de longitud que experimentan en la deformación dos pequeños segmentos del material, definidos inicialmente por los vectores $\overset{o}{\vec{a}} = 10^{-2}(0,1,1)$ y $\overset{o}{\vec{b}} = 10^{-2}(0,\sqrt{3},-1)$.
b) Determine el ángulo entre ambos vectores antes y después de la deformación.
c) Obtenga los valores propios y las direcciones principales del tensor de deformación.

Solución: a) Tras la deformación, $a = |\vec{a}| = 1.415{\cdot}10^{-2}$, $\mathrm{b} = |\vec{b}| = 1.9997{\cdot}10^{-2}$.

b) $\overset{o}{\theta}_{ab} = 75^\circ$, $\theta_{ab} = 74.986^\circ$. c) Valores propios $\varepsilon_1 = 5,\ \varepsilon_2 = 8,\ \varepsilon_1 = -2$. Direcciones propias: $\vec{u}_1 = (1,0,0),\ \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1),\ \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1).$

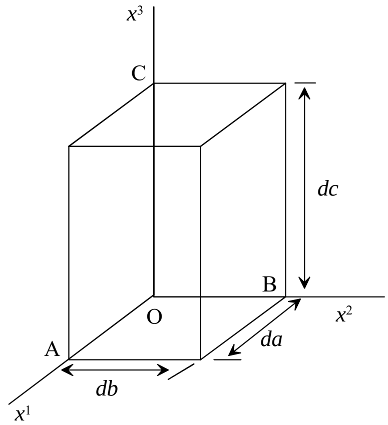
PROBLEMA 5.19.- Considere un paralelepípedo de lado dl, situado en el origen de un sistema de coordenadas cartesiano. Tras una deformación plana que afecta a los ejes ξ^1 y ξ^2. Los lados del paralelepípedo estos dos ejes de este plano se alargan un 10% y 20% , respectivamente, en relación a su tamaño original, mientras que la diagonal que definen el origen de coordenadas y su vértice opuesto en el plano $\xi^1\xi^2$ se alarga un 10%. a) Determine el tensor de deformación, así como b) la medida de la otra diagonal y el ángulo que forman ambas diagonales. c) Calcule el coeficiente de dilatación cúbica de la deformación suponiendo válida la aproximación de deformación infinitesimal y compárelo con el coeficiente obtenido sin suponer válida dicha aproximación.

Solución: a)

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0.105 & -0.0575 & 0 \\ -0.0575 & 0.220 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Se alarga un 20%, 83.40º, c) Coeficiente dilatación en aproximación infinitesimal=0.325. Ídem sin aproximaciones: 0.315.

PROBLEMA 5.20.- Considere el paralelepípedo ortogonal e infinitesimal de la figura. Tras una deformación los lados del paralelepípedo pasan a medir: $(1+2\Delta)da$, $(1-\Delta)db$ y $(1-\Delta)dc$, respectivamente. Asimismo, los ángulos definidos pos las aristas pasan a ser: $\theta_{12}=(1+\Delta)\pi/2$, $\theta_{13}=(1-\Delta)\pi/2$, $\theta_{23}=(1-\Delta)\pi/2$. a) Determine las componentes del tensor deformación. b) Calcule, en el límite de pequeñas deformaciones, el coeficiente de dilatación cúbica.



Solución:

a)

$$\tilde{\varepsilon}=\begin{pmatrix} 2\Delta^2+2\Delta & -\frac{1}{2}(1+2\Delta)(1-\Delta)sen\left(\Delta\frac{\pi}{2}\right) & \frac{1}{2}(1+2\Delta)(1-\Delta)sen\left(\Delta\frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{1}{2}(1+2\Delta)(1-\Delta)sen\left(\Delta\frac{\pi}{2}\right) & \frac{1}{2}\left(\Delta^2-2\Delta\right) & -\frac{1}{2}(1-\Delta)^2 sen\left(\Delta\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(1+2\Delta)(1-\Delta)sen\left(\Delta\frac{\pi}{2}\right) & -\frac{1}{2}(1-\Delta)^2 sen\left(\Delta\frac{\pi}{2}\right) & \frac{1}{2}\left(\Delta^2-2\Delta\right) \end{pmatrix}$$

b) Es isócoro.